JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **30**. 180–196 (1980)

Approximationsfehler der Ableitungen von Interpolationspolynomen

RICHARD HAVERKAMP

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Universität Münster. Roxeler Straße 64, 4400 Münster, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Received April 25, 1979

Let $p_n \in \Pi_n (n = 1, 2, 3,...)$ denote the polynomial interpolating a given function $u \in C^1[-1, 1]$ at the extremum points $t_j = \cos j\pi/n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, of the nth Čebyšev polynomial. Denote the Čebyšev norm on $C[-1, 1]$ by $\| \ \|$. Then the following estimate holds: $\|u' - p_n'\| \leqslant (2 + 2 \log n) \inf\{\|u' - q\|: q \in \Pi_{n-1}\}$. This improves earlier results by Schönhage (*Math. Z.* **94** (1966), 79–83) and the author (*J. Approx. Theory* **23** (1978). 261–266). The new result is based on the use of a generalized Lebesgue function D_n. For the given interpolation points the estimate is sharp. Similar but weaker results are obtained for higher derivatives.

1. EINLEITUNG

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in C[-1, 1]$ sei Π_n der Raum der algebraischen Polynome bis zum Grad n und

$$\|u\| = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |u(t)|, \qquad E_n(u) = \inf_{p \in \Pi_n} \|u - p\|.$$

Mit den Interpolationsoperatoren

$$\tilde{L}_{n-1}: C[-1, 1] \to \Pi_{n-1}, \qquad L_n: C[-1, 1] \to \Pi_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

bei denen in den Nullstellen $\tilde{t}_j = \cos(j - \frac{1}{2})(\pi/n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ bzw. den Extremstellen $t_j = \cos j(\pi/n)$, $0 \leqslant j \leqslant n$ der Čebyšev-Polynome $T_n(t) = \cos n(\arc\cos t)$ interpoliert wird, gilt nach Rivlin ([7, Seiten 12, 13])

$$\|u - \tilde{L}_{n-1} u\| \leqslant (2 + (2/\pi) \log n) E_{n-1}(u), \qquad u \in C[-1, 1]. \tag{1.1}$$

Im vorliegenden Artikel wird gezeigt, daß im Fall $u \in C^1[-1, 1]$ die Ableitung u' durch $L_n' u := (L_n u)'$ ähnlich gut approximiert wird, und zwar gemäß der Beziehung

$$\|u' - L_n' u\| \leqslant (2 + 2 \log n) E_{n-1}(u'), \qquad u \in C^1[-1, 1]. \tag{1.2}$$

0021-9045/80/110180-17$02.00/0

Eine grobere Abschätzung wird in Haverkamp [3] mit anderer Schlußweise gewonnen; qualitativ scharf wird $u' - L'_n u$ schon in Schönhage [8] abgeschätzt.

Als einfache Folgerung gewinnt man Fehlerabschätzungen für höhere Ableitungen und mit den Jackson-Sätzen als Abschwächung Kriterien für gleichmäßige Konvergenz der k-ten Ableitungen.

In vergleichbaren Konvergenzsätzen von Neckermann, Runck [4] werden für globale Konvergenz der k-ten Ableitungen stärkere Voraussetzungen benötigt.

Den Anstoß zur vorliegenden Arbeit gaben zwei Artikel von Pallaschke [5, 6], in denen optimal stabile Integrations- und Differentiationsformeln entwickelt werden.

2. Fehler der ersten Ableitungen

Analog zum Nachweis von (1.1) wird hier (1.2) bewiesen, indem man die Größen

$$\|L'_n\|_* = \sup\{\|L'_n u\| : u \in C^1[-1, 1], \|u'\| \leqslant 1\}$$

geeignet abschätzt.

Satz 2.1. *Für $n \in \mathbb{N}$, $u \in C^1[-1, 1]$ gilt*

$$\|L'_n\|_* \leqslant 1 + 2 \log n; \tag{2.1}$$

$$\|u' - L'_n u\| \leqslant (2 + 2 \log n)\, E_{n-1}(u'). \tag{2.2}$$

Beweis. Da $p' - L'_n p$ für $p \in \Pi_n$ verschwindet, gilt

$$\|u' - L'_n u\| \leqslant (1 + \|L'_n\|_*)\, \|u' - p'\|$$
$$\text{für } u \in C^1[-1, 1], \quad p \in \Pi_n.$$

Wegen $\Pi_{n-1} = \{p' : p \in \Pi_n\}$ ist damit (2.2) auf (2.1) zurückgeführt.

Einfache Rechnung ergibt

$$\|L'_1\|_* = 1, \qquad \|L'_2\|_* = 2, \qquad \|L'_3\|_* = 8/3,$$

und es bleibt zu zeigen, daß (2.1) auch in den Fällen $n \geqslant 4$ zutrifft.

Die Knoten t_j sind nach fallender Größe geordnet

$$-1 = t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 < t_0 = 1.$$

Seien w_j, $0 \leqslant j \leqslant n$ die Lagrange'schen Basispolynome und sei ferner

$$I_j = [t_j, t_{j-1}], \qquad l_j = t_{j-1} - t_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$V_j = \sum_{k=0}^{j} w_k, \qquad W_j = \sum_{k=j}^{n} w_k, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n;$$

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} l_j \, |W_j'|. \tag{2.3}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$|u(t_j) - u(t_{j-1})| \leqslant \|u'\| \, l_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad u \in C^1[-1, 1]; \tag{2.4}$$

$$W_0 = V_n = V_{j-1} + W_j = 1, \qquad V'_{j-1} = -W'_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n; \tag{2.5}$$

$$D_n = \sum_{j=1}^{k} l_j \, |V'_{j-1}| + \sum_{j=k+1}^{n} l_j \, |W'_j|, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{2.3'}$$

Durch einfache Umformung erhält man für $u \in C[-1, 1]$ aus der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$L_n u = u(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \{u(t_j) - u(t_{j-1})\} \, W_j.$$

Nach Differenzieren folgt mit (2.4) und der Dreiecksungleichung

$$|L'_n u| \leqslant \|u'\| \sum_{j=1}^{n} l_j \, |W'_j| = \|u'\| \, D_n \qquad \text{für } u \in C^1[-1, 1]. \tag{2.6}$$

Diese Abschätzung ist offenbar scharf in dem Sinne, daß es zu $t \in [-1, 1]$ und $\varepsilon > 0$ ein $u \in C^1[-1, 1]$ gibt, für das gilt

$$|(L'_n u)(t)| > \|u'\| \, (D_n(t) - \varepsilon).$$

Damit ist die Beziehung $\|L'_n\|_* = \|D_n\|$ bewiesen.

Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen

$$D_n(t) \leqslant 1 + 2 \log n \qquad \text{für } t \in [0, 1],$$

da die Knoten $t_j = \cos j\pi/n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, symmetrisch liegen. Die gleiche Schlußweise, nach der (2.2) auf (2.1) zurückgeführt wurde, ergibt mit (2.6) die punktweise Abschätzung

$$|(u' - L'_n u)(t)| \leqslant (1 + D_n(t)) \, E_{n-1}(u') \quad \text{für } u \in C^1[-1, 1], t \in [-1, 1], \tag{2.6'}$$

auf die unten im Beweis zu Satz 2.2 verwiesen wird.

In den weiteren Überlegungen werden einige Eigenschaften der Čebyšev-Polynome $T_n(t) = \cos n(\arc \cos t)$ benutzt.

$$\|T_n\| = 1; \qquad T_n(t_j) = (-1)^j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n;$$
$$\|T_n'\| = T_n'(1) = (-1)^{n-1}\, T_n'(-1) = n^2;$$
$$\sqrt{1-t^2}\,|T_n'(t)| = n\sqrt{1 - T_n^2(t)}, \qquad t \in [-1, 1];$$
$$(1-t^2)\, T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0;$$
$$T_n'(t_j) = 0, \qquad (1-t_j^2)\, T_n''(t_j) = (-1)^{j-1}\, n^2, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Der Beweis ist in [7] auf den ersten Seiten ausgeführt. Für das Polynom

$$g_n(t) = \frac{1}{n^2}(t^2 - 1)\, T_n'(t)$$

mit den Nullstellen t_j, $0 \leqslant j \leqslant n$ erhält man damit

$$g_n'(t) = T_n(t) + \frac{1}{n^2}\, tT_n'(t); \qquad g_n''(t_1) = t_1/(1-t_1^2); \tag{2.7}$$
$$g_n'(t_j) = (-1)^j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1;$$
$$g_n'(t_j) = 2(-1)^j, \qquad j \in \{0, n\}; \tag{2.8}$$
$$(-1)^j g_n(t) > 0, \qquad t \in (t_j, t_{j-1}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n; \tag{2.9}$$
$$|g_n'(t)| \leqslant \sqrt{1 + 1/\pi^2} \qquad \text{für } t \in [-t_1, t_1]. \tag{2.10}$$

Die Aussagen (2.7)–(2.9) folgen unmittelbar.

Mit $t_1 = \cos \pi/n$ erhält man

$$|t|/\sqrt{1-t^2} \leqslant \cot \pi/n \leqslant n/\pi \qquad \text{für } t \in [-t_1, t_1]$$

und nach (2.7) und obiger Darstellung von $|T_n'(t)|$ folgt

$$|g_n'(t)| \leqslant \max_{x \in [0,1]} \left\{ x + \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2} \right\}$$
$$= \sqrt{1 + 1/\pi^2} \qquad \text{für } t \in [-t_1, t_1].$$

Mit der im folgenden benutzten Konvention, daß rationale Funktionen in hebbaren Singularitäten stetig ergänzt werden, erhält man nach (2.8) die Basispolynome w_j in der Form

$$w_j(t) = (-1)^j g_n(t)/(t - t_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$
$$w_0(t) = -g_n(t)/[2(1-t)],$$
$$w_n(t) = (-1)^n g_n(t)/[2(1+t)].$$

Zur Darstellung der Polynome V_j, W_j setzen wir

$$S_0(t)=\frac{1}{2(1-t)},\qquad S_j(t)=\frac{1}{t_j-t}-S_{j-1}(t),\qquad j=1,2,\dots,n-1; \tag{2.11}$$

$$R_n(t)=\frac{1}{2(1+t)},\qquad R_j(t)=\frac{1}{t-t_j}-R_{j+1}(t),\qquad j=n-1,\dots,2,1 \tag{2.11'}$$

und erhalten wegen

$$V_j=w_j+V_{j-1},\qquad W_j=w_j+W_{j+1},\qquad 1\leqslant j\leqslant n-1$$

mit einfachem Induktionsschluß

$$V_{j-1}=(-1)^j g_n S_{j-1},\qquad W_j=(-1)^j g_n R_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{2.12}$$

Im folgenden Lemma A werden Hilfsmittel zusammengestellt, mit denen dann in den Lemmata B und C die einzelnen Summanden aus (2.3) und (2.3′) abgeschätzt werden.

LEMMA A.

$$2R_j(1)>R_j(t_1)\qquad \textit{für } 2\leqslant j\leqslant n; \tag{A1}$$

$$S_j^{(k)}(t)>0\qquad \textit{für } t<t_j,\quad 0\leqslant j\leqslant n-1,\quad k\in\{0,1,2\}; \tag{A2}$$

$$(-1)^k R_j^{(k)}(t)>0\qquad \textit{für } t>t_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n,\quad k\in\{0,1,2\}; \tag{A2'}$$

$$0<R_j(t)<\frac{1}{t-t_j}\qquad \textit{für } t>t_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n-1; \tag{A3}$$

$$(t_j-t)\,S_{j-1}(t)\leqslant\frac{1}{2}\qquad \textit{für } t\leqslant t_j,\quad 1\leqslant j\leqslant\frac{n}{2}; \tag{A4}$$

$$(t-t_j)\,R_{j+1}(t)\leqslant\frac{1}{2}\qquad \textit{für } t\in I_j,\quad 1\leqslant j\leqslant\frac{n+1}{2}; \tag{A5}$$

$$l_jV_{j-1}(t)=(t-t_j)(1-W_{j+1}(t))+(t_{j-1}-t)\,V_{j-2}(t)$$
$$\textit{für } 2\leqslant j\leqslant n-1. \tag{A6}$$

Beweis. Wegen $\frac{1}{2}<t_1=\cos\pi/n<1$ folgt

$$2R_n(1)-R_n(t_1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+t_1}\right)>0.$$

$$2R_{n-1}(1)-R_{n-1}(t_1)=\frac{3t_1-1-t_1^2}{2t_1(1+t_1)}>0.$$

Aus der Beziehung

$$R_j(t) = \frac{1}{t - t_j} - \frac{1}{t - t_{j+1}} + R_{j+2}(t), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n - 2 \tag{A7}$$

erhält man mit den Größen

$$C_k = (1 - t_k)/(t_1 - t_k), \qquad 2 \leqslant k \leqslant n - 1$$

durch einfache Umformung

$$2R_j(1) - R_j(t_1) = (2 - C_j C_{j+1})(t_j - t_{j+1}) + 2R_{j+2}(1) - R_{j+2}(t_1)$$
$$\text{für } 2 \leqslant j \leqslant n - 2.$$

Damit folgt nun (A1) wegen

$$t_{k+1} < t_k, \qquad 0 < C_k < C_2 \qquad \text{für } 2 < k \leqslant n - 1$$

durch Induktion nach $n - j$, wenn noch $C_2 \leqslant \sqrt{2}$ gezeigt wird. Mit $t_k = \cos k\pi/n$ folgt nach Additionstheoremen

$$t_1 - t_2 = (1 - t_1)(1 + 2t_1), \qquad 1 - t_2 = (1 - t_1)(2 + 2t_1)$$

und wegen $n \geqslant 4$, $t_1 = \cos \pi/n$ erhält man

$$C_2 = (2 + 2t_1)/(1 + 2t_1) \leqslant (2 + \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Damit ist (A1) bewiesen.

Indem man zunächst R_n, R_{n-1} betrachtet, erhält man $(A2')$ mit (A7) ebenfalls durch Induktion, und (A2) folgt analog.

Zusammen mit der Rekursionsformel (2.11′) folgt (A3) unmittelbar.

Die Abschätzung (A4) wird durch Induktion bewiesen.

Offenbar gilt

$$l_j \leqslant l_{j+1} \qquad \text{für } 1 \leqslant j \leqslant n/2. \tag{A8}$$

Für S_0, S_1 erhält man damit

$$(t_1 - t)\, S_0(t) = \frac{1}{2}\,(t_1 - t)/(1 - t) \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{für } t \leqslant t_1,$$

$$\begin{aligned}(t_2-t)\,S_1(t)&=(t_2-t)\left\{\frac{1}{t_1-t}-\frac{1}{2(1-t)}\right\}\\&=\frac{1}{2}-\frac{l_2}{t_1-t}+\frac{1}{2}\,\frac{l_1+l_2}{1-t}\\&\leqslant\frac{1}{2}-l_2\left\{\frac{1}{t_1-t}-\frac{1}{1-t}\right\}\\&\leqslant\frac{1}{2}\qquad\text{für } t\leqslant t_2.\end{aligned}$$

Sei $n\geqslant 6$ und $3\leqslant j\leqslant n/2$. Dann gilt nach (A2) und Induktionsannahme

$$(t_j-t)\,S_{j-3}(t)\leqslant\tfrac{1}{2}(t_j-t)/(t_{j-2}-t)\qquad\text{für } t<t_j,$$

und nach der zu (A7) analogen Beziehung folgt damit

$$(t_j-t)\,S_{j-1}(t)\leqslant(t_j-t)\left\{\frac{1}{t_{j-1}-t}-\frac{1}{2(t_{j-2}-t)}\right\}\qquad\text{für } t\leqslant t_j.$$

Von hier an kann mit (A8) wie im Fall $j=2$ weiter abgeschätzt werden, und (A4) ist bewiesen.

Neben (A4) gilt aus Symmetriegründen

$$(t-t_j)\,R_{j+1}(t)\leqslant\tfrac{1}{2}\qquad\text{für } t\geqslant t_j,\quad n/2\leqslant j\leqslant n-1.$$

Im Fall n ungerade, $j=(n+1)/2$ gilt also

$$(t-t_j)\,R_{j+1}(t)\leqslant\tfrac{1}{2}\qquad\text{für } t\in I_j=[t_j,t_{j-1}].$$

Mit (A3) und (A8) folgt direkt

$$(t-t_j)\,R_{j+1}(t)\leqslant(t-t_j)/(t-t_{j+1})\leqslant l_j/(l_j+l_{j+1})\leqslant\tfrac{1}{2}$$

für $t\in I_j$, $1\leqslant j\leqslant n/2$, und (A5) ist gezeigt.

Aus (2.11), (2.12) erhält man durch einfache Umformung

$$l_jV_{j-1}(t)=(t-t_j)\,V_j(t)+(t_{j-1}-t)\,V_{j-2}(t)\qquad\text{für } 2\leqslant j\leqslant n-1.$$

Zusammen mit (2.5) ergibt dies (A6), und Lemma A ist bewiesen.

LEMMA B. *Für $t\in I_1$, $1\leqslant j\leqslant n$ gilt*

$$|W_j'(t)|\leqslant|W_j'(1)|=2R_j(1).$$

Beweis. Neben $g_n(1) = g_n(t_1) = 0$ gilt nach (2.7), (2.8)

$$g_n'(1) = 2, \qquad g_n'(t_1) = -1, \qquad g_n''(t_1) > 0.$$

Nach (2.12) und (A2') folgt damit

$$|W_j'(t_1)| = R_j(t_1) \qquad \text{für } 2 \leqslant j \leqslant n; \tag{B1}$$

$$(-1)^j W_j'(1) = 2R_j(1) > 0 \qquad \text{für } 1 \leqslant j \leqslant n; \tag{B2}$$

$$(-1)^j W_j''(t_1) > 0 \qquad \text{für } 2 \leqslant j \leqslant n. \tag{B3}$$

Alle n Nullstellen von $w_0 = 1 - W_1$ liegen in $[-1, t_1]$, so daß man mit (B2) erhält

$$|W_1'(t)| \leqslant |W_1'(1)| = 2R_1(1) \qquad \text{für } t \in I_1.$$

Für $2 \leqslant j \leqslant n$ hat das Polynom $W_j' \in \Pi_{n-1}$ wegen

$$W_j(t_k) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant j-1; \qquad W_j(t_k) = 1, \quad j \leqslant k \leqslant n \tag{B4}$$

nur einfache Nullstellen, genau eine in $(t_1, 1)$ und genau $n-2$ in $(-1, t_1)$. Daher hat auch W_j'' nur einfache Nullstellen, höchstens eine in $I_1 = [t_1, 1]$, und es gilt $W_j'(1)\, W_j''(1) > 0$.

Nach (B2), (B3) haben daher auch $W_j''(t_1)$, $W_j''(1)$ gleiches Vorzeichen. Also hat W_j'' in I_1 keine Nullstelle, und mit (B1), (B2) und (A1) folgt schließlich

$$\begin{aligned} |W_j'(t)| &\leqslant \max\{|W_j'(t_1)|, |W_j'(1)|\} \\ &= 2R_j(1) = |W_j'(1)| \qquad \text{für } t \in I_1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \end{aligned}$$

und Lemma B ist bewiesen.

LEMMA C. *Für $t \in I_k$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$ gelten mit $c := \sqrt{1 + 1/\pi^2}$ die Ungleichungen:*

$$|g_n'(t)| \leqslant c, \qquad |g_n(t)| \leqslant c \min\{t_{k-1} - t, t - t_k\}; \tag{C1}$$

$$|V_j'(t)| \leqslant cS_j(t_{k-1}) \qquad \textit{für } 0 \leqslant j \leqslant k-2; \tag{C2}$$

$$|W_j'(t)| \leqslant cR_j(t_k) \qquad \textit{für } k+1 \leqslant j \leqslant n; \tag{C2'}$$

$$0 < l_k V_{k-1}'(t) \leqslant 1 + c. \tag{C3}$$

Beweis. Mit $I_k \subset [-t_1, t_1]$, $g_n(t_k) = g_n(t_{k-1}) = 0$ folgt (C1) nach (2.10).

Aus (2.12), (A2′) und (C1) erhält man

$$\begin{aligned}|W_j'(t)| &\leqslant c\{R_j(t) - (t-t_k)\,R_j'(t)\}\\ &\leqslant cR_j(t_k) \qquad \text{für } k+1 \leqslant j \leqslant n,\end{aligned}$$

und mit (A2) statt (A2′) folgt (C2) analog.

Das Polynom $V_{k-1}' = -W_k' \in \Pi_{n-1}$ hat nach (2.5) und (B4) wenigstens $n-1$ Nullstellen in $(-1,1)\backslash I_k$. Wegen $t_k < t_{k-1}$, $V_{k-1}(t_k) = 0$, $V_{k-1}(t_{k-1}) = 1$ ist also V_{k-1}' in I_k positiv.

Nach (A6) und (2.12) folgt

$$\begin{aligned}0 < l_k V_{k-1}'(t) &= 1 - (V_{k-2} + W_{k+1})(t) - (t-t_k)\,W_{k+1}'(t)\\ &\quad + (t_{k-1} - t)\,V_{k-2}'(t)\\ &= 1 + (-1)^k g_n(t)(S_{k-2} + R_{k+1})(t)\\ &\quad + (-1)^k g_n'(t)\{(t-t_k)\,R_{k+1}(t) - (t_{k-1} - t)\,S_{k-2}(t)\}\\ &\quad - (-1)^k g_n(t)\{(t_{k-1} - t)\,S_{k-2}'(t) - (t-t_k)\,R_{k+1}'(t)\}.\end{aligned}$$

Auf I_k nimmt nach (A2), (A2′) und (2.9) keine der Funktionen S_{k-2}, S_{k-2}', R_{k+1}, $-R_{k+1}'$ und $(-1)^k g_n$ negative Werte an, so daß man mit (C1), (A4) und (A5) erhält

$$\begin{aligned}0 < l_k V_{k-1}'(t) &\leqslant 1 + c(S_{k-2} + R_{k+1})(t)\min(t_{k-1} - t, t - t_k)\\ &\quad + c\,|(t-t_k)\,R_{k+1}(t) - (t_{k-1} - t)\,S_{k-2}(t)|\\ &\leqslant 1 + 2c\max\{(t_{k-1} - t)\,S_{k-2}(t), (t-t_k)\,R_{k+1}(t)\}\\ &\leqslant 1 + c.\end{aligned}$$

Hiermit ist auch Lemma C bewiesen.

Als vorläufige Abschätzung der Funktion D_n aus (2.3) bzw. (2.3′) erhält man mit den Lemmata B and C durch Einsetzen

$$D_n(t) \leqslant D_n(1) = 2\sum_{j=1}^{n} l_j R_j(1) \qquad \text{für } t \in I_1; \tag{2.13}$$

$$D_n(t) \leqslant 1 + c\left\{1 + \sum_{j=1}^{k-1} l_j S_{j-1}(t_{k-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} l_j R_j(t_k)\right\}$$
$$\text{für } t \in I_k, \quad 2 \leqslant k \leqslant (n+1)/2. \tag{2.14}$$

Zur weiteren Abschätzung setzen wir

$$\begin{aligned}
&s_j = \sin j(\pi/n), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n;\\
&K(x) = (2x/\pi)\tan(\pi/2x), \qquad x \in (1, \infty);\\
&a_k = s_k R_{k+1}(t_k), \qquad b_k = s_k S_{k-1}(t_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;\\
&A_k = \sum_{j=k+1}^{n-1} s_j/(t_k - t_j), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-2;\\
&B_k = \sum_{j=1}^{k-1} s_j/(t_j - t_k), \qquad 2 \leqslant k \leqslant n;\\
&a_0 = b_0 = A_{n-1} = B_1 = 0
\end{aligned}$$

und zeigen

LEMMA D.

$$\sum_{j=k+1}^{n} l_j R_j(t_k) = (a_k + A_k)\tan\frac{\pi}{2n} \qquad \textit{für } 0 \leqslant k \leqslant n-1; \tag{D1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} l_j S_{j-1}(t_k) = (b_k + B_k)\tan\frac{\pi}{2n} \qquad \textit{für } 1 \leqslant k \leqslant n; \tag{D1$'$}$$

$$a_k \tan\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad b_k \tan\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \textit{für } 1 \leqslant k \leqslant n-1; \tag{D2}$$

$$A_0 \leqslant \frac{2n}{\pi}\log\frac{4n}{\pi}; \tag{D3}$$

$$B_{k-1} + A_k \leqslant \frac{2n}{\pi}\log\frac{2n}{\pi} \qquad \textit{für } 2 \leqslant k \leqslant n-1; \tag{D4}$$

$$K(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x^2} \qquad \textit{für } x \in [3, \infty); \tag{D5}$$

$$D_n(t) \leqslant D_n(1) \leqslant 1 + 2\log n \qquad \textit{für } t \in I_1; \tag{D6}$$

$$D_n(t) \leqslant 1 + 2\log n \qquad \textit{für } t \in [0, t_1]. \tag{D7}$$

Beweis. Mit Additionstheoremen erhält man

$$t_{j-k} - t_j = (s_{j-k} + s_j)\tan k\pi/2n \qquad \text{für } 0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n, \quad k \neq n, \tag{D8}$$

und nach der Rekursionsformel (2.12′) gilt

$$(R_j + R_{j+1})(t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \qquad \text{für } 0 \leqslant k < j \leqslant n-1.$$

Mit $l_j = t_{j-1} - t_j$, $s_n = 0$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{n} l_j R_j(t_k) &= \tan\frac{\pi}{2n} \sum_{j=k+1}^{n} (s_{j-1} + s_j)\, R_j(t_k) \\
&= \tan\frac{\pi}{2n} \left\{ s_k R_{k+1}(t_k) + \sum_{j=k+1}^{n-1} s_j (R_j + R_{j+1})(t_k) \right\} \\
&= (a_k + A_k) \tan\frac{\pi}{2n} \qquad \text{für } 0 \leqslant k \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

Entsprechend weist man (D1′) nach.

Der Beweis zu (D2) ist unter Benutzung von (D8) ähnlich dem zu (A4) und wird hier nicht ausgeführt.

Zum Nachweis von (D3), (D4) setzen wir

$$t(x) = \cos x\frac{\pi}{n}, \qquad s(x) = \sin x\frac{\pi}{n} \qquad \text{für } x \in [0, n];$$

$$f_x(y) = s(y)/(t(x) - t(y)) \qquad \text{für } x, y \in [0, n], \quad x \neq y.$$

Für $x \in [0, n)$ ist, wie man leicht bestätigt, f_x auf $(x, n]$ konvex.

Mit $s(x) = s_x$, $t(x) = t_x$ für $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ folgt also

$$s_j/(t_k - t_j) = f_k(j) \leqslant \int_{j-(1/2)}^{j+(1/2)} f_k\, dt \qquad \text{für } 0 \leqslant k < j \leqslant n-1$$

und durch Summation

$$A_k \leqslant \int_{k+(1/2)}^{n-(1/2)} f_k\, dt = \frac{n}{\pi} \log \frac{t(k) + t(\frac{1}{2})}{t(k) - t(k+\frac{1}{2})} \qquad \text{für } 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{D9}$$

wobei $\log 1 = 0$ dem Fall $k = n-1$ entspricht.

Völlig analog erhält man

$$B_k \leqslant \frac{n}{\pi} \log \frac{t(\frac{1}{2}) - t(k)}{t(k-\frac{1}{2}) - t(k)} \qquad \text{für } 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{D9′}$$

Mit $t(0)=1$, $t(\frac{1}{2})=\cos(\pi/2n)$ folgt nach (D9) die Ungleichung

$$A_0 \leqslant \frac{n}{\pi}\log\frac{1+t(\frac{1}{2})}{1-t(\frac{1}{2})}=\frac{2n}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{4n}\leqslant\frac{2n}{\pi}\log\frac{4n}{\pi}.$$

Einfache Umformung mit Additionstheoremen ergibt

$$\begin{aligned}
Z(x) &:= (t(\tfrac{1}{2})-t(x-\tfrac{1}{2}))(t(\tfrac{1}{2})+t(x+\tfrac{1}{2}))=s^2(x)-s(1)\,s(x)\\
N(x) &:= (t(x-1)-t(x-\tfrac{1}{2}))(t(x+\tfrac{1}{2})-t(x+1))\\
&= 2s^2(x)(1-t(\tfrac{1}{2}))-(t(\tfrac{1}{2})-t(1))^2.
\end{aligned}$$

Für die Funktion $Q(x):=Z(x)/N(x)$ weist man damit leicht die folgende Abschätzung nach

$$\begin{aligned}
0 \leqslant Q(x) \leqslant Q(n/2) &= (1-s(1))/(s(1)-s(\tfrac{1}{2}))^2\\
&\leqslant \cot^2\frac{\pi}{2n} \qquad \text{für } x\in[1,n-1],
\end{aligned}$$

und zusammen mit (D9), (D9′) ergibt dies die Abschätzung

$$\begin{aligned}
B_{k-1}+A_k &\leqslant \frac{n}{\pi}\log Q\left(k-\frac{1}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{2n}{\pi}\log\frac{2n}{\pi} \qquad \text{für } 2\leqslant k\leqslant n-1.
\end{aligned}$$

Für $v(t):=\tan t$ erhält man mit

$$v'=1+v^2; \qquad v^2(t)\leqslant 12t^2/\pi^2 \qquad t\in[0,\pi/6]$$

die zu (D5) äquivalente Abschätzung

$$v(t)=\tan t\leqslant t(1+4t^2/\pi^2), \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right].$$

Ausgehend von (2.13) folgt nun mit $a_0=0$ nach (D1), (D3) und (D5)

$$\begin{aligned}
D_n(t)\leqslant D_n(1) &= 2A_0\tan\frac{\pi}{2n}\leqslant 2K(n)\log\frac{4n}{\pi}\\
&\leqslant 2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{4}+\log n\right)\leqslant 1+2\log n \qquad \text{für } t\in I_1.
\end{aligned}$$

Aus (2.14) erhält man mit (D1), (D1′), (D2), (D4), (D5) und $c = \sqrt{1 + 1/\pi^2} \leqslant 1.05$ entsprechend

$$\begin{aligned} D_n(t) &\leqslant 1 + 2c + c(B_{k-1} + A_k)\tan\frac{\pi}{2n} \\ &\leqslant 3.1 + 1.05\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\log\frac{2n}{\pi} \qquad \text{für } t \in I_k,\quad 2 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

In den Fällen $n \geqslant 7$ kann diese Abschätzung leicht zu (D7) vergröbert werden. Durch Einsetzen verifiziert man mit (2.14), (D1) und (D1′), daß (D7) auch in den Fällen $n \in \{4, 5, 6\}$ zutrifft, und Lemma D ist bewiesen.

Als Summe von (D6) und (D7) erhält man nun die Abschätzung

$$D_n(t) \leqslant 1 + 2\log n \qquad \text{für } t \in [0, 1],\quad n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 4,$$

auf die der Beweis von Satz 2.1 bereits zurückgeführt wurde.

SATZ 2.2. *Für $u \in C^1[-1, 1]$ und ungerade $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|(u' - L_n' u)(0)| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) E_{n-1}(u').$$

Beweis. Einfache Rechnung ergibt

$$\|u' - L_1' u\| \leqslant 2E_0(u'), \qquad |(u' - L_3' u)(0)| \leqslant 5/2E_2(u').$$

Für $n \geqslant 4$ gilt nach (2.6′) neben (2.2) auch die punktweise Abschätzung $|(u' - L_n' u)(t)| \leqslant (1 + D_n(t))\, E_{n-1}(u')$.

Im folgenden sei $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Mit $g_n'(0) = 0$, $|g_n(0)| = 1/n$ folgt nach (2.11), (2.12), (A2) und aus Symmetriegründen

$$|W_{n-j}'(0)| = |V_j'(0)| = \frac{1}{n} S_j'(0) \qquad \text{für } 1 \leqslant j \leqslant k;$$

$$D_n(0) = \frac{1}{n}\left\{ l_{k+1} S_k'(0) + 2\sum_{j=1}^{k} l_j S_{j-1}'(0) \right\}.$$

Analog zum Nachweis von (D1) und (D1′) folgt damit

$$\begin{aligned} D_n(0) &= \frac{2}{n}\tan\frac{\pi}{2n}\sum_{j=1}^{k} s_j/t_j^2 \\ &= \frac{2}{n}\tan\frac{\pi}{2n}\sum_{j=0}^{k-1} s_{k-j}/t_{k-j}^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Für die Summe gewinnt man mit

$$s_{k-j} = \cos(2j+1)\frac{\pi}{2n}, \qquad t_{k-j} = \sin(2j+1)\frac{\pi}{2n}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k-1$$

$$\cos\alpha/\sin^2\alpha \leqslant 1/\alpha^2, \qquad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

die Abschätzung

$$\sum_{j=0}^{k-1} s_{k-j}/t_{k-j}^2 \leqslant \frac{4n^2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

Mit $n = 2k+1 \geqslant 5$ und $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ folgt elementar

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2j+1)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \sum_{j=0}^{k-1} s_{k-j}/t_{k-j}^2 \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Zusammen mit (2.15) und (D5) erhält man schließlich

$$D_n(0) \leqslant \frac{2}{n}\frac{\pi}{2n}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

und Satz 2.2 ist bewiesen.

3. Gleichmässige Konvergenz det k-ten Ableitungen

Im folgenden sei $C_d[-1, 1]$ der Teilraum der Dini–lipschitz-stetigen Funktionen $u \in C[-1, 1]$, deren Stetigkeitsmodul $\omega(\cdot, u)$ also $\lim_{h \to 0+} \omega(h, u) \log 1/h = 0$ genügt, und sei ferner

$$C_d^k[-1, 1] = \{u \in C^k[-1, 1] : u^{(k)} \in C_d[-1, 1]\} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Nach Jackson-Sätzen (vgl. [1, Seiten 147, 148]) gilt:

$$E_m(v) \leqslant \omega\left(\frac{\pi}{m+1}, v\right) \qquad \text{für } v \in C[-1, 1], \quad m \in \mathbb{N}_0; \tag{3.1}$$

$$E_m(v) \leqslant \frac{\pi}{2(m+1)} E_{m-1}(v') \qquad \text{für } v \in C^1[-1, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Als Abschwächung der Sätze 2.1, 2.2 folgt mit (3.1) unmittelbar

Satz 3.1.

(a) $\lim_n \|u' - L_u' u\| = 0$ für $u \in C_d^1[-1, 1]$;

(b) $\lim_n (L_{2n+1}' u)(0) = u'(0)$ für $u \in C^1[-1, 1]$.

Mit einfachem Induktionsbeweis gewinnt man aus Satz 2.1 Fehlerabschätzungen für den Fall höherer Ableitungen.

SATZ 3.2. *Für $k \in \mathbb{N}$, $u \in C^k[-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant k$ gilt*

$$\|u^{(k)} - L_n^{(k)}u\| \leqslant \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{k-1} (2 + 2\log n)\, E_{n-k}(u^{(k)}).$$

Beweis. Im Fall $k = 1$ ergibt Satz 2.1 die Behauptung. Als Teilergebnis eines Satzes von Duffin–Schaeffer ([2] oder auch [7, Seite 119]) erhält man:

$$\|L_m' v\| \leqslant m^2 \|v\| \qquad \text{für } v \in C[-1, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Sei $k \in \mathbb{N}$, $u \in C^{k+1}[-1, 1]$ und $n \geqslant k + 1$.

Dann gilt nach Satz 2.1

$$\|u^{(k+1)} - L_{n-k}' u^{(k)}\| \leqslant (2 + 2\log n)\, E_{n-k-1}(u^{(k+1)}), \tag{3.4}$$

und nach (3.3) und Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\|L_{n-k}'(u^{(k)} - L_n^{(k)}u)\| &\leqslant (n-k)^2 \|u^{(k)} - L_n^{(k)}u\| \\ &\leqslant (n-k)^2 \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{k-1} (2 + 2\log n)\, E_{n-k}(u^{(k)}).\end{aligned}$$

Mit (3.2) und $n \geqslant k + 1 \geqslant 2$ folgt daraus elementar

$$\begin{aligned}&\|L_{n-k}'(u^{(k)} - L_n^{(k)}u)\| \\ &\quad\leqslant \left[\left(\frac{\pi n}{2}\right)^k - 1\right] (2 + 2\log n)\, E_{n-k-1}(u^{(k+1)}).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wegen $L_n^{(k)} v \in \Pi_{n-k}$, $v \in C[-1, 1]$ gilt die Faktorisierung $L_n^{(k+1)} = L_{n-k}' L_n^{(k)}$. Zusammen mit (3.4) und (3.5) ergibt dies

$$\begin{aligned}\|u^{(k+1)} - L_n^{(k+1)}u\| &\leqslant \|u^{(k+1)} - L_{n-k}' u^{(k)}\| + \|L_{n-k}'(u^{(k)} - L_n^{(k)}u)\| \\ &\leqslant \left(\frac{\pi n}{2}\right)^k (2 + 2\log n)\, E_{n-k-1}(u^{(k+1)})\end{aligned}$$

nach Dreiecksungleichung.

Damit ist Satz 3.2 durch Induktionsschluß bewiesen.

Als Abschwächung erhält man

SATZ 3.3. *Für $k \in \mathbb{N}$, $u \in C_d^{2k-1}[-1, 1]$ gilt*

$$\lim_n \|u^{(k)} - L_n^{(k)}u\| = 0.$$

Beweis. Aus Satz 3.2 gewinnt man mit (3.2) und (3.1) Abschätzungen der Form

$$\|u^{(k)} - L_n^{(k)}u\| \leqslant C_k \omega\left(\frac{1}{n}, u^{(2k-1)}\right) \log n$$

für $k \in \mathbb{N}$, $u \in C^{2k-1}[-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0(k)$.

Damit ist Satz 3.3 als Verallgemeinerung von Satz 3.1(a) bewiesen.

4. Zur Schärfe der Abschätzungen

Durch günstigere Wahl der Knoten kann man gegenüber Satz 2.1 keine qualitativ besseren Abschätzungen erzielen, und auch nicht, indem man neben Interpolationsoperatoren allgemeiner Projektionsoperatoren zur Konkurrenz zuläßt. Dies ist eine einfache Folgerung der Sätze von Kharshiladze–Lozinski.

Gleichmäßige Konvergenz der k-ten Ableitungen kann in den Fällen $k \geqslant 2$ auch schon für $u \in C^{2k-1}[-1, 1]$ gezeigt werden. Diese Verschärfung von Satz 3.3 erhält man, indem man Satz 3.2 mit der Beweistechnik aus [3] entsprechend verschärft.

In kompakten Teilintervallen von $(-1, 1)$ erhält man auch in den Fällen $k \geqslant 2$ gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen $L_n^{(k)}u$ schon im Fall $u \in C_d^k[-1, 1]$, was hier jedoch ebenfalls nicht ausgeführt wird. Diese Aussage zur lokalen Konvergenz gilt auch bei Interpolation in Nullstellen von Jacobi-Polynomen, wie in der zitierten Arbeit von Neckermann, Runck [4] gezeigt wird.

Durch drei Zahlenbeispiele soll demonstriert werden, daß im Fall sehr glatter Funktionen schon bei niedrigem Polynomgrad die Ableitungen sehr gut approximiert werden.

In den Beispielen sind die Fehler $e_k(n) := \|u^{(k)} - L_n^{(k)}u\|$ für $k = 1, 2$ und einige Werte von n aufgetragen.

(1) $u(t) = \exp\dfrac{1+t}{2}$

n	4	6	8	10
$e_1(n)$	4.8 − 4	1.1 − 6	1.2 − 9	9.0 − 13
$e_2(n)$	5.3 − 3	2.6 − 5	5.1 − 8	5.7 − 11

(2) $u(t) = \tan\left\{\frac{\pi}{8}(1+t)\right\}$

n	4	6	8	10	14	18
$e_1(n)$	6.3 − 3	2.8 − 4	1.1 − 5	4.0 − 7	4.8 − 10	6.6 − 13
$e_2(n)$	7.6 − 2	7.1 − 3	4.7 − 4	2.8 − 5	6.4 − 8	1.3 − 10

(3) $u(t) = \log(2-t)$

n	4	6	8	10	14	18	22
$e_1(n)$	1.5 − 2	1.2 − 3	8.8 − 5	6.5 − 6	3.5 − 8	1.9 − 10	4.5 − 13
$e_2(n)$	1.9 − 1	3.1 − 2	4.0 − 3	4.5 − 4	4.7 − 6	4.1 − 8	2.7 − 10

LITERATURVERZEICHNIS

1. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York/St. Louis/San Francisco/Toronto/London/Sydney, 1966.
2. R. J. DUFFIN AND A. C. SCHAEFFER, A refinement of an inequality of the brothers Markoff, *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** (1941), 517–528.
3. R. HAVERKAMP, Approximationseigenschaften differenzierter Interpolationspolynome, *J. Approx. Theory* **23** (1978), 261–266.
4. L. NECKERMANN UND P. O. RUNCK, Über Approximationseigenschaften differenzierter Lagrange'scher Interpolationspolynome mit Jacobi'schen Abszissen, *Numer. Math.* **12** (1968), 159–169.
5. D. PALLASCHKE, Optimale Differentiations- und Integrationsformeln in $C_0[a, b]$, *Numer. Math.* **26** (1976), 201–210.
6. D. PALLASCHKE, Konvergenz optimaler Differentiationsformeln, *Numer. Math.* **27** (1977), 421–426.
7. TH. J. RIVLIN, "The Chebyshev Polynomials," Wiley, New York/London/Sydney/Toronto, 1974.
8. A. SCHÖNHAGE, Lebesguekonstanten bei numerischer Differentiation, *Math. Z.* **94** (1966), 79–83.